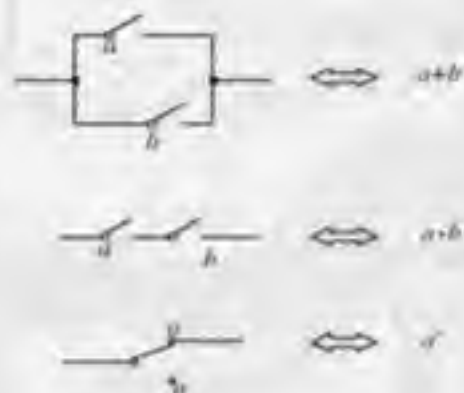


目 录

第1章 开关电路与命题逻辑的数学描述	1
数学实验 你能解决这些问题吗?	2
1.1 开关电路的数学描述	3
习题 1	8
1.2 命题逻辑的数学描述	9
习题 2	12
第2章 布尔代数	14
2.1 二元布尔代数	15
习题 3	20
2.2 布尔函数与布尔表达式	21
习题 4	25
数学文化 布尔与布尔代数	26
第3章 开关电路	28
3.1 开关电路设计	29
习题 5	35
3.2 门电路	36
习题 6	42
*3.3 布尔函数的化简	46
习题 7	50
〔多知道一点〕 应用实例参考	43
卡诺图化简法	47
课程总结报告参考题	52
附 录 数学词汇中英文对照表	53

第1章

开关电路与命题逻辑的数学描述



伟大数学家笛卡儿 (R. Descartes, 1596—1650) 认为一切问题都可以化为数学问题, 实践证明: 一个学科一旦能用数学描述, 该学科就会突飞猛进。那么让逻辑学和开关电路这种与数量关系和空间形式相去甚远的学科是否也可用数学来描述呢? 这要归功于数学家布尔, 他于 1847 年创造出崭新的数学分支——布尔代数, 它使古典数学未能解决的逻辑学问题迎刃而解。1938 年美国电气工程师申农发现用布尔代数可以很好地描述开关电路。本章就是介绍这两门学科是如何用数学描述的。



数学实验

你能解决这些问题吗?

所谓“开关”，就是在电路中执行接通与断开功能的器件，由一些开关连接而成的电路叫作开关电路(switching circuit)。我们可以用如下符号表示一个开关。



当将刀片拨向上方时，线路断开；相反，拨向下方时，线路接通，这叫单刀单掷开关，还有一种叫单刀双掷开关，如下图所示。

这个开关有两个触点 a 和 b ，当刀片拨向上方时， a 通 b 断；当刀片拨向下方时， a 断 b 通。这种开关是我们最常用的。



实验1 现在如果在楼梯中间装一电灯，而在楼上楼下各用一个单刀双掷开关来控制此灯，使得楼上楼下的人都可以用就近的开关来控制灯的状态（即这两个开关中的任何一个的状态改变都能改变灯的当前状态），请你设计一开关电路，来满足这一设计要求。

实验2 如果你已完成实验1，那么请你进一步设计一个开关电路，由三个开关，分别安装在大厅的三个入口处，来控制大厅的主灯，其设计要求与实验1相同，即这三个开关中任何一个开关状态的改变都将改变主灯当前状态。

实验3 用四个开关控制一个灯，要求同前可能吗？

以上三个实验，估计同学们不难解决第一个问题，第二个就有些困难，第三个如没有从上二个摸索总结出规律性来就更难了，如果失败了，不必灰心丧气，在本课程结束后，这些问题就会迎刃而解，从而使同学们可以体会理论指导实践的重要性。

精品教学网www.itvb.net

全力打造全国最新最全的免费视频教学网站，现有内容已经覆盖学前，小学，初中高中，大学，职业等各学段欢迎各位爱学人士前来学习交流。

(若有需要本书配套的特级教师同步辅导视频请联系QQ181335740)

世界上有些现象虽然千变万化,但从某种角度看往往可归结于两种对立而互补的状态。例如对开关来说,有拉线开关、拨动开关、闸刀开关、继电器开关、电子开关等,但就其在电路中的作用而言,只有接通和断开两种状态。再如命题(proposition)有各种各样,但在形式推理中,我们只关心命题的真和假这两种状态,而不关心它们的内容。再如为了反映同学们的学习成绩,往往采用百分制,但到期末决定升留级时,我们不得不采用二分法,即及格或不及格两种。在一场足球决赛中,我们一定要决出胜负,如果踢成平局还要加时赛,还要点球大战……从上述例子可见,有些事物本身就具有二元特性,有些是人为的划分。二分法是各种划分中最简单的一种,它把概念划分成两个互相对立的子概念。例如人可以划分为男人和女人。我国古代有些哲学家夸大了这种方法,甚至认为可以将世界上一切现象都归结于这种二元系统,并用“阴”和“阳”来表示。这无疑是够全面的,但是在许多情况下,这种抛弃事物一切非本质的表象,只剩下我们关心的两种非此即彼的特性或实质,无疑将大大简化我们的研究。已经证明,用这种方法在数学、哲学和工程技术的研究中获得极大成功。布尔代数(Boolean algebra)就是其光辉的范例之一。

1.1 开关电路的数学描述

一个开关是指一种器件,在任何时刻,它都处于下列两种状态之一:断开或接通。为了用数学来描述开关电路,首先我们要找两个不同的符号来表示这两种状态。譬如“ \times ”和“ \checkmark ”,也可以用“0”和“1”,0代表断开状态,而1代表接通状态。这里0、1已失去原来代表数的意义,赋予了新的意义。

其次,我们要引用符号来表示开关。一般,我们用英文字母 a 、 b 、 c …、 x 、 y 、 z …等表示开关,开关 a 在画电路图时可用“ $-a-$ ”表示,并且 $a=1$ 就表示开关 a 处于接通状态,而 $a=0$ 表示开关 a 处

同一符号在事物场合表示不同对象,并不奇怪。在社会上有许多同名同姓的人,即使同一个家族或同一单位,最亲近的人也有重名的人。

于断开状态。

两个开关 a 和 b ，如果在任何时刻都取相同的状态，则我们认为这两个开关是一样的。用 $a=b$ 表示；两个开关 a 和 b ，如果在任何时刻都取相反的状态，即 $a=1$ 时 $b=0$ ，而 $a=0$ 时 $b=1$ ，则称开关 b 是 a 的反相开关，记为 $b=a'$ 。显然反相概念是对称的，我们也可以将 a 称为 b 的反相开关，并写成 $a=b'$ 。这样，反相开关 a' 的状态，完全依赖 a 的状态来决定。在数学上一个量完全依赖另一些量的变化而变化的话，则我们把这个量称为另一些量的函数。这样，我们可以将 a' 看成是 a 的函数（或运算）。按反相的定义，它们之间的函数关系见表 1.1。

表 1.1

a	a'
0	1
1	0

表 1.2

a	b	$a+b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

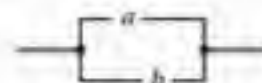
表 1.3

a	b	$a \cdot b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

从表 1.2 看出 $0+1=1$ ，请读者仔细考虑，因为这里 0 、 1 和 $+$ 都有非断断续义，因此千万不要以旧的思想定式来对待新的运算。

两个开关 a 和 b ，可以将它们并联（parallel connection）成一个

开关网络；用 $a+b$ 表示，即



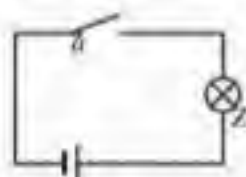
可用

$a+b$ 表示。该开关网络可以看成是一个由 a 和 b 组合而成的新开关，因为它在电路中也只有两种状态：接通或断开，而且它的状态完全由 a 和 b 的状态所决定。这种依赖关系，和上面一样称为函数关系，即 $a+b$ 是 a 和 b 的函数。函数有时也被称为运算。所以，我们可以将“+”看成是开关与开关之间的并联运算。这里运算符号“+”也已失去了原来在算术中数的“加法”关系，赋予新的意义。这一点应该切记。为了区别起见，有时称并联为逻辑加或布尔加，在不至于混淆的情况下就简称为“加法”运算。根据并联在电路中的作用， $a+b$ 与 a 和 b 之间的函数关系由表 1.2 给出。

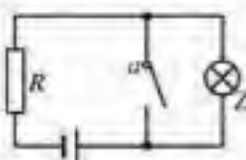
同样，两个开关 a 和 b ，可以串联（series connection）成一个开

关网络，用 $a \cdot b$ 表示，并称为逻辑乘积或布尔乘积。即—— a —— b ——可用—— $a \cdot b$ ——表示，而 $a \cdot b$ 与 a 和 b 之间的函数关系，根据串联在电路中的作用，由表 1.3 给出。

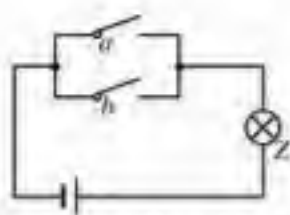
为了使我们对上述三种基本函数（或运算）有更直观的理解，让我们将完整的电路图画出，并用电灯 Z 的亮(1)和灭(0)来反映开关网络的通(1)和断(0)，并将分析出的状态对应关系列表于图的右边。

图 1-1 $Z=a$

开关 a 的状态	电灯 Z 的状态
0	0
1	1

图 1-2 $Z=a'$

开关 a 的状态	电灯 Z 的状态
0	1
1	0

图 1-3 $Z=a+b$

开关 a 的状态	开关 b 的状态	电灯 Z 的状态
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

图 1-4 $Z=a \cdot b$

开关 a 的状态	开关 b 的状态	电灯 Z 的状态
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

这样我们不难在图 1-1、图 1-2、图 1-3、图 1-4 中看出，电灯 Z 与电路中的开关的关系分别是 $Z=a$ 、 $Z=a'$ 、 $Z=a+b$ 和 $Z=a \cdot b$ 。

今后，我们就将“+”和“ \cdot ”看成是二元运算，而将“ $'$ ”看成一元运算。因为开关 a 和 b 是只能在 0 或 1 上取值的变元，而运算

图 1-2 中的 R 是短路电阻。开关 a 闭合时，流经电灯 Z 的电流很少，电灯 Z 不亮。故从电路的角度看， Z 相当于“断开”，即 $a=1$ 时， $Z=0$ 。

结果的值还是取 0 或 1, 这样我们就说这些运算在集合 $\{0, 1\}$ 上封闭, 或称运算 “+”, “ \cdot ”, “ $'$ ” 定义在集合 $\{0, 1\}$ 上.

我们不难验证上述这三个运算还满足下列等式.

$$a + b = b + a,$$

$$a \cdot b = b \cdot a,$$

$$a + a' = 1,$$

$$a \cdot a' = 0,$$

$$a + 0 = a,$$

$$a \cdot 1 = a,$$

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c), \quad a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c).$$

前三个等式比较简单, 我们不难直接看出它们的正确性, 例如第一行的二个等式说开关 a 和 b 并联 (串联) 与 b 和 a 并联 (串联) 是等效的, 即并联时哪个在上哪个在下一样的, 串联时哪个在先哪个在后一样的, 也可以用真值表 (truth table) 验证. 下面我们仅验证 $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$, 这一等式表示下面两个开关网络是等效的, 即它们在自变量所有可能取值情况下都有相同的函数值.



现在让我们用列表法来比较这两个网络的通断特性.

表 1.4

a	b	c	$a \cdot (b + c)$	$(a \cdot b) + (a \cdot c)$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

今后, 我们把形如 1.4 这样的表称为“真值表”, 它是将函数在自变量所有可能取值情况下所对应的函数值算出, 按一定顺序排列成一纵列表. 为了穷尽所有可能的取值, 我们要知道, n 个变元, 每个变元只能取二个值, 故共有 2^n 个不同的组合. 排列的次序可以按二进位数的大小, 依次从小到大 (或从大到小) 排列. 上表中共有三个变元, 故共有 $2^3 = 8$ 行, 我们从小到大, 从上到下排出. 这样, 我们看到 $a \cdot (b + c)$ 和 $(a \cdot b) + (a \cdot c)$

这里, 我们用列表法证明分配律 $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ 这种方法称为穷尽法. 尽管在自变量的取值域还有别的情况下, 才有可能出错, 这里我们的取值域是 $\{0, 1\}$, 只有两个元素, 故可采用.

真值表是应用新编代数中的概念, 历史上命题代数是开关电路.

$b) + (a \cdot c)$ 在任何情况下有相同的值, 即这两个网络在电路中是等效的, 即得 $a \cdot (b + c) \approx (a \cdot b) + (a \cdot c)$. 这一等式类似于初等代数中乘法对加法的分配律 (distributive law), 但提醒大家一下, 我们这里应该称它为串联运算对并联运算的分配律, 或称布尔乘法 (Boolean multiplication) 对布尔加法 (Boolean addition) 的分配律. 与初等代数不同的是, 在开关电路中, 布尔加法对布尔乘法也有分配律, 即

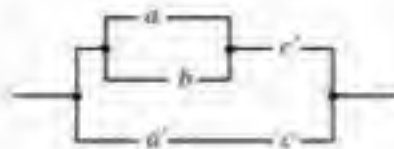
$a + (b \cdot c) \approx (a + b) \cdot (a + c)$. 它表示网络



是等效的, 验证留给同学作为习题.

本节我们要求同学们掌握开关电路和它的数学描述之间的相互表示, 以及学会简单公式真值表的计算和排列方法, 为进一步学习打好基础. 为此让我们再举一些例子.

例 1 求下面这个开关电路的数学表达式.



解 初学时, 我们可采用逐步转换的方法, 每步只转换两个结合最紧密的串联或并联开关.

$$\begin{aligned}
 \text{原电路} &\Leftrightarrow \text{---} \left[\begin{array}{c} (a+b) \cdot c' \\ a' \cdot c \end{array} \right] \text{---} \\
 &\Leftrightarrow \text{---} \left[\begin{array}{c} (a+b) \cdot c' \\ (a' \cdot c) \end{array} \right] \text{---} \\
 &\Leftrightarrow \text{---} ((a+b) \cdot c') + (a' \cdot c) \text{---}
 \end{aligned}$$

这样, 我们就得到原开关电路的表示式为

$$((a+b) \cdot c') + (a' \cdot c).$$

反之, 如果我们已知表达式, 欲求它的开关电路, 则只要按相反方向, 逐步将 “+” 表示成并联, 将 “ \cdot ” 表示成串联, 这里 “ \Leftrightarrow ”

初学时, 建议每步用一对括号. 这样我们明确知道哪两个开关先组合, 然后再与哪个开关组合 \Rightarrow 以后在熟练计算时先按次序后, 有些括号可以省略; 但公式更简洁.

表示等效（或相互可表示）。

例 2 求 $a' + (b \cdot c)$ 的真值表。

解 由于该式有三个变元，故该表有 $2^3=8$ 行。

1. 按二进制从小到大列出自变量所有不同组合。
2. 根据 a 列的值，算出 a' 列的对应值。
3. 根据 b 列和 c 列的值，算出 $b \cdot c$ 列的对应值。
4. 最后根据 a' 列和 $b \cdot c$ 列的值，算出 $a' + (b \cdot c)$ 的对应值。
5. 列表（见表 1.5）。

表 1.5

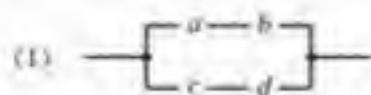
a	b	c	a'	$b \cdot c$	$a' + (b \cdot c)$
0	0	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	1	1

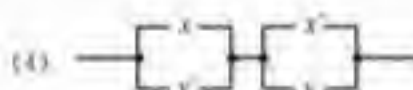
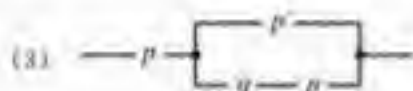
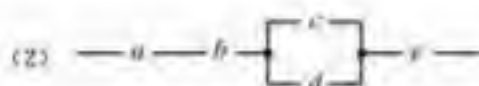
注 如果熟练的话，2、3 步可省略。

最后，让我们总结一下。本节的目的是将开关电路用数学来描述。为此，我们首先用字母来代表开关，用 0 和 1 来表示开关的断开和接通两种状态，并用“=”号表示等效，然后将开关电路中的三种基本电路——并联、串联和反相（negative phase），分别用三个运算符号“+”、“ \cdot ”和“ $'$ ”来表示。最后发现在电路中这三个运算遵循的四条基本规律。

习题 1

1. 写出下列网络的数学表示式。





2. 画出具有下列数学表示式的开关网络。

(1) $x + (y + z)$;

(2) $a + (b' + c' + d')$;

(3) $(u + v) + (u' + w)$;

(4) $(f + g) + (f' + g')$;

3. 用真值表证明:

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

4. 开关 a 在星期二、星期五和星期日接通; 开关 b 在星期一、星期三、星期五接通; 开关 c 在星期三、星期四、星期五、星期六接通。其他时间这三个开关都断开, 求证 $a + b = a + c$, 但是 $b \neq c$, (这说明运算 “+” 的消去律不成立)。

5. 如果 $a + b = a + c$ 是否可得出 $b = c$? 即运算 “+” 的消去律是否成立? 如不成立, 请仿上题举一反例。

1.2 命题逻辑的数学描述

命题是具有真假值的陈述句, 并称判断。它是逻辑学的基本概念与研究对象。和开关一样, 命题也是千变万化, 但从逻辑推理角度考虑, 我们只关心它们的两种属性或状态, 即真的还是假的。

正如上节所述, 可以将简单的开关经过并联、串联和反相组成更复杂的开关网络, 可以将该网络本身看成一个开关, 它的状态完全由组成它的简单开关的状态确定。命题也一样, 可以由简单命题用命题连接词 (propositional connectives) “或”、“与”、“非” 组合成复合命题, 而且复合命题的真假完全由组成它的简单命题的真假来决定。

例如:

今天不下雨。

今天下雨且明天刮风。

今天下雨或者明天刮风。

这三个都是复合命题，我们不难看出，这些命题的真假是完全由组成它的子命题的真假决定的。例如今天不下雨真，当且仅当今天下雨假，即它们恰巧有相反的值。

命题逻辑 (propositional logic) 的主要任务之一就是研究复合命题与其子命题间的结构与真值关系，为了将命题逻辑数学化，首先要用符号来表示命题，我们约定用英文字母表示命题，其次我们要用二个不同的符号来表示命题两种属性 (或状态)，用“0”表示假，“1”表示真，但习惯上用“F”表示假，而用“T”表示真。

这样， $a = F$ 就表示命题 a 是假的，而 $b = T$ 表示命题 b 是真的。最后，我们要用符号来表示三个基本连接词。

表 1.6

a	$\neg a$
F	T
T	F

1. 命题连接词“非”用符号“ \neg ”表示。

这样一来，如果 a 表示上海是大城市，则 $\neg a$ 就表示上海不是大城市，容易看出 a 与 $\neg a$ 的真假值恰好相反，它们之间的关系由表 1.6 所确定。这样，我们可以将 $\neg a$ 看成是 a 的一元函数 (或运算)。

在自然语言中，与连接词“非”有相同功能的其他连接词有“不”、“否定”、“相反”……总之，当且仅当二个命题的真假值在任何条件下都相反时，我们把其中一个看成是另一个的非命题。

2. 命题连接词“或”用符号“ \vee ”表示。

表 1.7

a	b	$a \vee b$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

如果 a 表示命题今天停电， b 表示电视机坏了，那么 $a \vee b$ 就表示复合命题今天停电或者电视机坏了，容易看出 $a \vee b$ 假当且仅当 a 和 b 同时为假，这样 $a \vee b$ 的真假值完全由 a 、 b 的真假值决定，它们之间的关系由表 1.7 所确定，因此我们可以将 $a \vee b$ 看成是变元 a 和 b 的二元函数 (或运算)。

在自然语言中，与连接词“或”有相同功能的其他连接词还有

“不是……就是……”，“也许……也许……”，“是……还是……”，“二者必居其一”等。今后只有能满足表 1.7 要求的连接词，才可使用符号“ \vee ”。

3. 命题连接词“与”用符号“ \wedge ”表示。

这样，当 a 表示北京是我国的首都， b 表示上海是我国的商业中心时，则 $a \wedge b$ 就表示北京是我国首都并且上海是我国的商业中心。容易看出复合命题 $a \wedge b$ 真当且仅当 a 和 b 同时为真，即它们之间的真值关系，由表 1.8 所确定。

因此，我们可以将 $a \wedge b$ 看成是变元 a 和 b 的二元函数（或运算）。

在自然语言中，与连接词“与”有相同功能的还有“和”、“并且”、“不但……而且……”、“不仅……也……”。在数学化时为了保证每个符号的确定性，今后只有真值关系符合表 1.8 的连接词时，才可使用符号“ \wedge ”。

表 1.8

a	b	$a \wedge b$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

与上节相似，我们可以将 \neg 、 \vee 、 \wedge 分别看成定义在 $\{F, T\}$ 上的一元和二元运算（或函数），这些运算是在 $\{F, T\}$ 上封闭，并满足下列等式：对任何命题 a, b, c 有：

$$\begin{aligned} a \vee b &= b \vee a, & a \wedge b &= b \wedge a, \\ a \vee \neg a &= T, & a \wedge \neg a &= F, \\ a \vee F &= a, & a \wedge T &= a, \\ a \wedge (b \vee c) &= (a \wedge b) \vee (a \wedge c), & a \vee (b \wedge c) &= (a \vee b) \wedge (a \vee c). \end{aligned}$$

在这里我们将在任何情况下都取相同真假值的两个复合命题（或命题公式） A 和 B 看成是等价的或相同的，并用 $A=B$ 表示。上述等式的正确性，可用真值表法验证。我们仅证明 $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ ，其余请同学们自行验证。

列出真值表 1.9。

由于自然语言是多义的，因此“或”也有二种意义。一种是相容的，即二个命题都真时，复合命题也是真的。另一种是不相容的，例如或者我们打败侵略者，或者侵略者征服我们，这一命题中的“或者”是不相容的。这种复合命题真当且仅当其中之一真，另一个假。通常下“或”义的“或”是相容的。

表 1.9

a	b	c	$b \wedge c$	$a \vee (b \wedge c)$	$a \vee b$	$a \vee c$	$(a \vee b) \wedge (a \vee c)$
F	F	F	F	F	F	F	F
F	F	T	F	F	F	T	F
F	T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	F	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T	T
T	T	T	T	T	T	T	T

因为 $a \vee (b \wedge c)$ 列与 $(a \vee b) \wedge (a \vee c)$ 列的真值在所有条件下皆相等,故

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

这样,经数学化描述后,开关电路和命题逻辑这两门完全不同的学科竟然在结构和规律上完全相同,只不过在使用的符号上有所不同,其对应关系见表 1.10.但这不是本质的,数学上常把这种现象称为同构.同构的事物可以合并在一起研究,即抽象成一个统一的理论.这就是我们第二章的任务.

表 1.10

开关电路	\cup	$+$	\cdot	0	1
命题逻辑	\neg	\vee	\wedge	F	T

习题 2

设 a 表示“电源接通”,

b 表示“电视机有图像”,

c 表示“电视机有声音”.

1. 指出下列复合命题的确切含意.

(1) $(\neg a) \vee (b \wedge c)$;

(2) $a \wedge (\neg b) \wedge (\neg c)$.

2. 用符号表示下列复合命题:

- (1) 电视机没有图像, 也没有声音;
- (2) 电源已接通, 但电视机有声音没有图像.

3. 列出下列复合命题的真值表.

- (1) $(\neg a) \vee b$;
- (2) $(\neg a) \wedge (\neg b)$;
- (3) $(a \wedge (\neg b)) \vee ((\neg a) \wedge b)$.

4. 利用真值表求证:

- (1) $a \vee ((\neg a) \wedge b) = a \vee b$;
- (2) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

第2章 布尔代数



$$\begin{aligned} & (0, 1, +, \cdot, ') \\ & a + b = b + a \\ & a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \\ & a + 0 = a \\ & a \cdot 1 = a \\ & a + a' = 1 \\ & a \cdot a' = 0 \end{aligned}$$

我们知道，实际问题的数学描述并非我们的最终目的，更为重要的工作是暂时抛开原型，专门来研究抽象出来的数学模型——在本书中就是布尔代数，以便得出尽可能多的具有普遍意义的方法和规律，这一部分对培养和训练我们的逻辑思维 and 抽象思维能力是很有益处的，而且是以后解决实际问题的基础，所以希望读者给予充分重视。

在第1章中,我们发现在开关电路和命题逻辑的数学描述之间有许多共同特征。为了充分研究这些共同的本质特征,必须研究这些共同特征的抽象结构,即二者共同的数学模型,这就是本章要学习的布尔代数。

2.1 二元布尔代数

回顾第一章开关电路的数学描述这一节,在那里我们已把讨论对象从各种开关简化成“断开”和“接通”这两种状态。因此我们可以说开关电路的论域是集合(断开,接通)。我们还将开关的并联、串联和反相转变成集合(断开,接通)上的运算(函数)。运算的关系由表2.1定义。

表 2.1

开关 a	开关 b	a 的反相	a 与 b 并联	a 与 b 串联
断	断	通	断	断
断	通	通	通	断
通	断	断	通	断
通	通	断	通	通

在数学上往往将一个集合和定义在该集合上的若干个运算,所组成的系统称为代数系统。这样,我们把上述的集合及其上的三个运算放在一起,记成 $\langle \{\text{断开, 接通}\}, \text{并联, 串联, 反相} \rangle$,并称这种代数系统为开关代数。

为了使这种代数具有更广泛的适用性,我们要对此系统作进一步抽象,即将 $\langle \{\text{断开, 接通}\}, \text{并联, 串联, 反相} \rangle$ 中的具体内容抽走,但保持该系统的形式和关系。这就是下面要定义的抽象的二元布尔代数。

定义 2.1.1 二元布尔代数是指代数系统 $\langle \{0, 1\}, +, \cdot, ' \rangle$,即它的论域是集合 $\{0, 1\}$;运算有三个,其中“ $+$ ”和“ \cdot ”是二元运算,而“ $'$ ”是一元运算,“ $+$ ”称为布尔加法,“ \cdot ”称布尔乘法,而“ $'$ ”称为布尔否定。其运算由表2.2定义。

一般布尔代数论域中元素的个数可以是2ⁿ个或无穷多个。

在二元布尔代数 $(\{0, 1\}, +, \cdot, ')$ 中， $0, 1$ 是仅有的两个元素，所有符号 $0, 1, +, \cdot, '$ 都是确定的，没有具体意义的，只知道 $0, 1$ 是代数中的两个不同元素，而 $+$ 、 \cdot 、 $'$ 是定义在 $\{0, 1\}$ 上的三种运算，而布尔代数表 2.2 定义，二元布尔代数要经“解释”才有意义，才能变成布尔代数或逻辑代数（见图 2.1）。

这种解释中，从图 2.1 四条可以将其他规律都推出，在形式公理化布尔代数中，就以这四条作为一般布尔代数的公理，而对论域和运算都不作具体规定。

由于布尔代数中的运算 $+$ 、 \cdot 、 $'$ 与初等代数中的 $+$ 、 \cdot 、 $'$ 不同（虽然用相同符号），故对德·摩根律、幂等律、吸收律、分配律……都与我们在初等代数中学过的不同（千万不能混淆！）。

表 2.2

a	b	a'	$a+b$	$a \cdot b$
0	0	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	1	0
1	1	0	1	1

这样从关于运算 $+$ 、 \cdot 、 $'$ 的定义，我们不难用真值表法来验证下列规律在二元布尔代数中成立（见表 2.3）。

表 2.3

编号	名称	运 算 律
1	交换律	$a+b=b+a$ $a \cdot b=b \cdot a$
2	分配律	$a \cdot (b+c)=(a \cdot b)+(a \cdot c)$ $a+(b \cdot c)=(a+b) \cdot (a+c)$
3	么元律	$a+0=a$ $a \cdot 1=a$
4	逆元律	$a+a'=1$ $a \cdot a'=0$
5	幂等律	$a+a=a$ $a \cdot a=a$
6	极元律	$a+1=1$ $a \cdot 0=0$
7	吸收律	$a+(a \cdot b)=a$ $a \cdot (a+b)=a$
8	交叠律	$a+(a' \cdot b)=a+b$ $a \cdot (a'+b)=a \cdot b$
9	结合律	$(a+b)+c=a+(b+c)$ $(a \cdot b) \cdot c=a \cdot (b \cdot c)$
10	双重否定律	$(a')'=a$
11	德·摩根律	$(a+b)'=a' \cdot b'$ $(a \cdot b)'=a'+b'$

以上这些规律，可以用真值表逐一验证，分配律已在 1.1 节中验证过，现以德·摩根律（表 2.4）为例：

表 2.4

a	b	$(a+b)'$	$a' \cdot b'$	$(a \cdot b)'$	$a'+b'$
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	0	0

因为在所有可能情况下 $(a+b)'$ 与 $a' \cdot b'$ 取值相同，故 $(a+b)'=a' \cdot b'$ ，同样 $(a \cdot b)'=a'+b'$ 。

有了以上规律，我们可以将表达式化简，例如有了结合律（as-

associative law), 在 $(a+b)+c$ 或 $a+(b+c)$ 这样的式子中, 可以省掉括号, 直接写成 $a+b+c$ 和 $a+b+c$. 为了使表达式更简洁, 我们像在初等代数中一样, 约定乘法运算 \cdot 优先于加法运算 $+$, 这样, 在表达式 $a+(b \cdot c)$ 中的括号可以省掉, 写成 $a+b \cdot c$, 但写 $(a+b) \cdot c$ 时, 千万不能将括号省掉. 并且进一步约定, 在不至于引起误会的情况下, 乘法符号也可以省掉. 这样以上二式可写成 $a+bc$ 和 $(a+b)c$.

例 1 化简 $(a+b)(a+b'+c')$.

解 $(a+b)(a+b'+c') = aa+ab'+ac'+ba+bb'+bc'$ (分配律)
 $= a+ab'+ac'+ba+0+bc'$ (幂等律 逆元律)
 $= a+bc'$ (交换律, 吸收律, 么元律)

不难验证, 第 1 章中引出的两个系统即开关电路和命题逻辑的数学描述, 都可以看成是二元布尔代数, 因为在引入布尔代数时, 我们就是以开关代数作为原型的. 另外, 我们将说明布尔代数经过解释就可得到命题代数. 由此可见, 开关代数和命题代数都是布尔代数的具体化. 反之, 布尔代数是这二者的抽象.

例 2 将二元布尔代数作如下解释:

- (1) 将元素 0 解释成 F (假), 而将 1 解释成 T (真);
- (2) 论域 $= \{0, 1\} = \{F, T\}$;
- (3) “+” 解释成 \vee (或),
“ \cdot ” 解释成 \wedge (与),
“ $'$ ” 解释成 \neg (非).

这样 $(\{F, T\}, \vee, \wedge, \neg)$ 就是二元布尔代数, 因为连接词 “ \vee ”, “ \wedge ” 和 “ \neg ” 在 $\{F, T\}$ 上的函数关系如表 2.5 所示, 符合二元布尔代数关于 “+”, “ \cdot ”, “ $'$ ” 这三个运算的定义.

表 2.5

a	b	$\neg a$	$a \vee b$	$a \wedge b$
F	F	T	F	F
F	T	T	T	F
T	F	F	T	F
T	T	F	T	T

这种布尔代数被称为命题代数 (propositional algebra).

为了进一步说明开关代数和命题代数都是二元布尔代数, 请参看对照表 2.6.

表 2.6

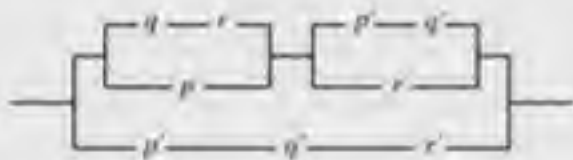
二元布尔代数	开 关 代 数	命 题 代 数																																													
元素集合 $\{0, 1\}$	状态集合 (断开、闭合)	命题的真值集合 $\{F, T\}$																																													
$+$ 运算	并联	或 (\vee)																																													
\cdot 运算	串联	与 (\wedge)																																													
$'$ 运算	反相	非 (\neg)																																													
I. $+$ 满足交换律 $a + b = b + a$		$(a \wedge b) = (b \wedge a)$																																													
I. \cdot 满足交换律 $a \cdot b = b \cdot a$		$(a \vee b) = (b \vee a)$																																													
II. \cdot 对于 $+$ 的分配律 $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$		<table> <tr> <th>a</th> <th>b</th> <th>c</th> <th>$a \wedge (b \vee c)$</th> <th>$(a \wedge b) \vee (a \wedge c)$</th> </tr> <tr><td>F</td><td>F</td><td>F</td><td>F</td><td>F</td></tr> <tr><td>F</td><td>F</td><td>T</td><td>F</td><td>F</td></tr> <tr><td>F</td><td>T</td><td>F</td><td>F</td><td>F</td></tr> <tr><td>F</td><td>T</td><td>T</td><td>F</td><td>F</td></tr> <tr><td>T</td><td>F</td><td>F</td><td>F</td><td>F</td></tr> <tr><td>T</td><td>F</td><td>T</td><td>T</td><td>T</td></tr> <tr><td>T</td><td>T</td><td>F</td><td>T</td><td>T</td></tr> <tr><td>T</td><td>T</td><td>T</td><td>T</td><td>T</td></tr> </table>	a	b	c	$a \wedge (b \vee c)$	$(a \wedge b) \vee (a \wedge c)$	F	F	F	F	F	F	F	T	F	F	F	T	F	F	F	F	T	T	F	F	T	F	F	F	F	T	F	T	T	T	T	T	F	T	T	T	T	T	T	T
a	b	c	$a \wedge (b \vee c)$	$(a \wedge b) \vee (a \wedge c)$																																											
F	F	F	F	F																																											
F	F	T	F	F																																											
F	T	F	F	F																																											
F	T	T	F	F																																											
T	F	F	F	F																																											
T	F	T	T	T																																											
T	T	F	T	T																																											
T	T	T	T	T																																											
II. $+$ 对于 \cdot 的分配律 $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$																																															
III. 么元律 $a + 0 = a$		$a \vee F = a$																																													
III. 么元律 $a \cdot 1 = a$		$a \wedge T = a$																																													
IV. 逆元律 $a + a' = 1$		$a \vee (\neg a) = T$																																													
IV. $a \cdot a' = 0$		$a \wedge (\neg a) = F$																																													

表 2.3 中的规律, 是布尔代数中的定理, 现已证明开关代数和命题代数都是布尔代数, 故可将它们应用到开关代数和命题代数中, 现

图, 命题代数中自, $(a \vee x) \wedge (a \vee y) = a \vee (x \wedge y)$ 的左也于命题有限, 左能列说, 请和查 1.2 节中的表 1.3 (p. 17).

在让我们举例来说明.

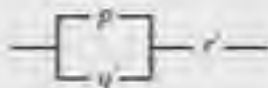
例 3 化简以下开关网络:



解 以上网络相当于开关代数中的如下表达式:

$$\begin{aligned}
 & (p+q \cdot r) \cdot (r'+p' \cdot q') + (p' \cdot q' \cdot r') \\
 &= p \cdot r' + q \cdot r \cdot r' + p \cdot p' \cdot q' + q \cdot r \cdot p' \cdot q' + p' \cdot q' \cdot r' \quad (\text{分配律}) \\
 &= p \cdot r' + 0 + 0 + 0 + p' \cdot q' \cdot r' \quad (\text{极元律, 逆元律}) \\
 &= p \cdot r' + p' \cdot q' \cdot r' \quad (\text{么元律}) \\
 &= (p + p'q') \cdot r' \quad (\text{分配律}) \\
 &= (p + q') \cdot r' \quad (\text{交叠律})
 \end{aligned}$$

化简后的网络为



例 4 求 $(p \cdot q' + p' \cdot q)$ 的逆元.

$$\begin{aligned}
 & \text{解 } (p \cdot q' + p' \cdot q)' \\
 &= (p \cdot q')' \cdot (p' \cdot q)' \quad (\text{德·摩根律}) \\
 &= (p' + q'') \cdot (p'' + q') \quad (\text{德·摩根律}) \\
 &= (p' + q) \cdot (p + q') \quad (\text{双重否定律}) \\
 &= (p'p + p'q' + pq + qq') \quad (\text{分配律}) \\
 &= pq + p'q' \quad (\text{交换律, 逆元律, 么元律})
 \end{aligned}$$

例 5 证明 $1' = 0$ 和 $0' = 1$.

$$\begin{aligned}
 & \text{证明 } 1' = (a + a')' \quad (\text{逆元律}) \\
 &= a' \cdot a'' \quad (\text{德·摩根律}) \\
 &= a' \cdot a \quad (\text{双重否定律}) \\
 &= 0 \quad (\text{逆元律})
 \end{aligned}$$

同理可证 $0' = 1$.

习题 3

1. 逐步化简下列布尔代数中的公式, 并指出每步化简时的依据, 即用到哪条规律。

(1) $(a \cdot b) + (a \cdot b')$

(2) $(p \cdot q) + [p \cdot (q' + r)]$

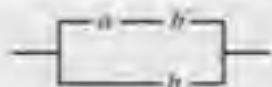
(3) $[h \cdot (a \cdot c)] + [a \cdot (h \cdot c')]$

(4) $p + ([p' \cdot (p + q)] + (q + r))$

(5) $[x + (y \cdot z)] \cdot [x + (y' + z)]$

2. 求出下列网络的表达式, 将其化简后, 再画出化简后的网络图。

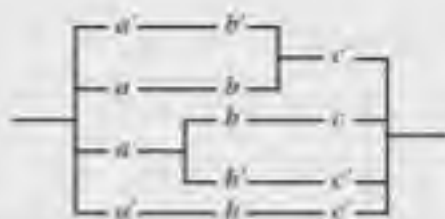
(1)



(2)



(3)



3. 一般地, 用 A 、 B 、 C 表示布尔代数中的公式, 请用已知规律证明:

(1) $A + B = 0 \Leftrightarrow A = B = 0$

(2) $A \cdot B = 1 \Leftrightarrow A = B = 1$

4. 证明: 若 $A + C = B + C$ 且 $AC = BC$, 则 $A = B$.

5. 证明: (1) 若 $A + C = B + C$ 且 $A \cdot C' = B \cdot C'$, 则 $A = B$.

(2) 若 $AC = BC$ 且 $AC' = BC'$, 则 $A = B$.

6. 用德·摩根定律证明 $(a \cdot b \cdot c)' = a' + b' + c'$ 及 $(a + b + c)' = a' \cdot b' \cdot c'$.

7. 化简下列各式:

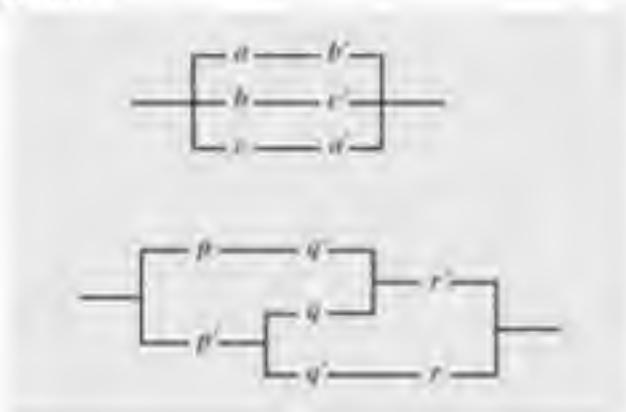
(1) $(a + b)' \cdot (b + c)'$

(2) $((p + q)' + r' + q)'$

(3) $a \cdot (a + b + c)'$

(4) $((x + y)' + (x + y)' + z)'$

8. 求下列开关网络的逆。



2.2 布尔函数与布尔表达式

我们指出, 我们的讨论仅限于在二元布尔代数中进行, 即讨论 $(\{0, 1\}, +, \cdot, ')$ 这样的布尔代数, 因此, 许多问题可以化简。

定义 2.2.1 我们将定义在二元布尔代数论域 $\{0, 1\}$ 上的函数称为布尔函数 (Boolean function), 更确切地说将 $\{0, 1\}^n$ 到 $\{0, 1\}$ 上的一个函数 f 称为 n 元布尔函数, 表示为 $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 其中 $y \in \{0, 1\}$, $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n$ 。

例如 $y = a'$ 是 $\{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ 的函数, 且它是一元布尔函数。

$y = a + b$ 和 $y = a \cdot b$ 都是 $\{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}$ 的函数, 故它们都是二元布尔函数。

定义 2.2.2 在二元布尔代数中, 由常元 0, 1 和变元经过有限次使用布尔运算 (Boolean operation) 符号 “+”, “ \cdot ” 和 “ $'$ ” 而构成的有效式子, 叫作布尔表达式 (Boolean expression)。

例如, $1, x', x' + 1, (x' + 1) \cdot y, (x + y') + x' \cdot y, \dots$ 都是布尔表达式。

以后, 我们常用 $E(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 表示含有 n 个变元的布尔表达式, 这样, $y = E(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 就是 $\{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ 的 n 元函数, 它是一个布尔函数, 即每个布尔表达式都对应一个布尔函数。

定理 2.2.1 任给一个一元布尔表达式 $E(x)$, 则

$$(4) \quad E(x) = E(1) \cdot x + E(0) \cdot x',$$

$$(2) \quad E(x) = (E(1) + x') \cdot (E(0) + x).$$

证明 用真值表方法, 因为

x	$E(x)$	$E(1) \cdot x + E(0) \cdot x'$	$(E(1) + x') \cdot (E(0) + x)$
0	$E(0)$	$E(0)$	$E(0)$
1	$E(1)$	$E(1)$	$E(1)$

所以 (1) $E(x) = E(1) \cdot x + E(0) \cdot x^2 +$

$$(2) \quad E(x) = (E(1) \div x') \cdot (E(0) \div x).$$

我们可以将定理 2.2.1 推广到有 2 个变元, 3 个变元, \cdots 甚至 n 个变元的布尔表达式上, 得

定理 2.2.2 对任何二元布尔表达式 $E(x_1, x_2)$, 都有

$$(1) \quad E(x_1, x_2) = E(1, 1)x_1x_2 + E(1, 0)x_1x_2' + \\ E(0, 1)x_1'x_2 + E(0, 0)x_1'x_2';$$

$$(2) \quad E(x_1, x_2) = (E(1, 1) - x_1' + x_2') \cdot (E(1, 0) + x_1' + x_2') \cdot \\ (E(0, 1) - x_1 - x_2') \cdot (E(0, 0) + x_1 + x_2).$$

证明 只要重复运用定理 2.2.1 即可得到.

$$(1) \quad E(x_1, x_2) = E(1, x_2) \cdot x_1 + E(0, x_2) \cdot x_1'$$

(对 $E(x_1, x_0)$ 中的变元 x_1 运用定理 2.2.1)

$$= [E(1,1)x_2 + E(1,0)x'_2] \cdot x_1 + [E(0,1)x_2 + E(0,0)x'_2] \cdot x'_1$$

(对 $E(1, x_1)$ 和 $E(0, x_1)$ 中的变元 x_1 运用定理 2.2.1)

$$= E(1,1)x_1x_2 + E(1,0)x_1x_1' + E(0,1)x_1'x_2 + E(0,0)x_1'x_1'.$$

(2) 的证明与(1)类似, 故省略.

类似定理 3.2.2, 我们可以写出三元布尔表达式的展开式. 有

$$(1) \quad E(x_1, x_2, x_3) = E(1, 1, 1)x_1x_2x_3 + E(1, 1, 0)x_1x_2x'_3 + \\ E(1, 0, 1)x_1x'_2x_3 + E(1, 0, 0)x_1x'_2x'_3 + \\ E(0, 1, 1)x'_1x_2x_3 + E(0, 1, 0)x'_1x_2x'_3 + \\ E(0, 0, 1)x'_1x'_2x_3 + E(0, 0, 0)x'_1x'_2x'_3.$$

因此,我们可以用
例用法将定理 2.2.2
推广到对任意 n 元函
数关系式上:

[illegible]

[illegible]

$$\begin{aligned}
 (2) \quad E(x_1, x_2, x_3) = & (E(1, 1, 1) + x_1' + x_2' + x_3') \cdot \\
 & (E(1, 1, 0) + x_1' + x_2' + x_3) \cdot \\
 & (E(1, 0, 1) + x_1' + x_2 + x_3') \cdot \\
 & (E(1, 0, 0) + x_1' + x_2 + x_3) \cdot \\
 & (E(0, 1, 1) + x_1 + x_2' + x_3') \cdot \\
 & (E(0, 1, 0) + x_1 + x_2' + x_3) \cdot \\
 & (E(0, 0, 1) + x_1 + x_2 + x_3') \cdot \\
 & (E(0, 0, 0) + x_1 + x_2 + x_3).
 \end{aligned}$$

例1 用定理 2.2.2 的推广, 将 $E(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 x_3'$ 展开.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad E(x_1, x_2, x_3) = & x_1 + x_2 x_3' \\
 = & (1 + 1 \cdot 0) x_1 x_2 x_3 + (1 + 1 \cdot 1) x_1 x_2 x_3' + \\
 & (1 + 0 \cdot 0) x_1 x_2' x_3 + (1 + 0 \cdot 1) x_1 x_2' x_3' + \\
 & (0 + 1 \cdot 0) x_1' x_2 x_3 + (0 + 1 \cdot 1) x_1' x_2 x_3' + \\
 & (0 + 0 \cdot 0) x_1' x_2' x_3 + (0 + 0 \cdot 1) x_1' x_2' x_3' \\
 = & x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_3' + x_1 x_2' x_3 + x_1 x_2' x_3' + x_1' x_2 x_3 + x_1' x_2 x_3'.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad E(x_1, x_2, x_3) = & x_1 + x_2 x_3' \\
 = & (1 + x_1' + x_2' + x_3') \cdot (1 + x_1' + x_2' + x_3) \cdot \\
 & (1 + x_1' + x_2 + x_3') \cdot (1 + x_1' + x_2 + x_3) \cdot \\
 & (0 + x_1 + x_2' + x_3') \cdot (1 + x_1 + x_2' + x_3) \cdot \\
 & (0 + x_1 + x_2 + x_3') \cdot (0 + x_1 + x_2 + x_3) \\
 = & (x_1 + x_2' + x_3') \cdot (x_1 + x_2 + x_3') \cdot \\
 & (x_1 + x_2 + x_3).
 \end{aligned}$$

从定理 2.2.1、定理 2.2.2 及例 1 中我们可以看到, 无论一元、二元、三元(或 n 元)布尔表达式, 最终都可被化成有一定规律可循的表达式, 为了明确其规律性, 我们必须定义一些概念. 在本课程中, 为了简便起见, 我们仅考虑 $n \leq 3$ 元布尔表达式及相应的其他概念. 因此, 在下面的定义和定理中, 我们对变元的个数 n 都加以限制, 即对 $n \leq 3$ 而言, 虽然这些定义和定理对一般的 n 也是成立的.

定义 2.2.3 对 $n \leq 3$ 个变元 x_1, x_2, \dots, x_n 来说, $x_1 x_2 \dots x_n$ 称

为最小项(minimal term), 而 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ 称为最大项(maximal term); 其中 x_i 表示 x_i 或 x_i' , 且 x_i 或 x_i' 恰有一个出现.

例 2 $n=1$ 时, 有 $2^1=2$ 个不同的最小项和最大项, 即 x_1 和 x_1' ;

$n=2$ 时, 有 $2^2=4$ 个不同的最小项 $x_1x_2, x_1x_2', x_1'x_2, x_1'x_2'$ 和 4 个最大项为 $(x_1' + x_2'), (x_1' + x_2), (x_1 + x_2'), (x_1 + x_2)$.

一般 n 个变元的最小项和最大项都有 2^n 个.

定义 2.2.4 对 $n \leq 3$ 个变元的布尔表达式 $E(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 如果

$$E(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P_1 + P_2 + \cdots + P_k,$$

其中 $P_i (i=1, \cdots, k)$ 都是 x_1, x_2, \cdots, x_n 这 n 个变元的最小项, 则称 $P_1 + P_2 + \cdots + P_k$ 是 $E(x_1, \cdots, x_n)$ 的标准积和范式(standard product sum normal form)(或主析取范式); 如果

$$E(x_1, x_2, \cdots, x_n) = Q_1 \cdot Q_2 \cdot \cdots \cdot Q_b,$$

其中 $Q_i (i=1, 2, \cdots, b)$ 都是 x_1, x_2, \cdots, x_n 这 n 个变元的最大项, 则称 $Q_1 \cdot Q_2 \cdot \cdots \cdot Q_b$ 是 $E(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的标准和积范式(standard sum product normal form)(或主合取范式).

于是从定理 2.2.2. 及其附注我们马上得到下面的范式定理.

定理 2.2.3 (范式定理) 任何布尔表达式, 都可化成标准的积和范式或标准的和积范式.

这样例 1 中的 (1) 是布尔表达式 $x_2 + x_2x_3'$ 的标准积和范式, 而 (2) 是它的标准和积范式.

前面我们已经讲过, 每个布尔表达式都对应一个布尔函数, 现在我们要问其逆命题是否成立, 即每个 $\{0, 1\}$ 上的 n 元函数是否都可以用布尔表达式来表示, 回答是肯定的, 因为任何 $\{0, 1\}$ 上的 n 元布尔函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是由它的一组 (2^n 个) 函数值 $\{f(0, 0, \cdots, 0), f(0, 0, \cdots, 1), \cdots, f(1, 1, \cdots, 1)\}$ 决定的, 这样利用定理 2.2.2. 及其附注就可以得到 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的布尔表达式. 因此有如下的完全性定理.

定理 2.2.4 (完全性定理) 任何一个 $n \leq 3$ 元布尔函数 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 都可以由 x_1, x_2, \cdots, x_n 的布尔表达式表示.

至此, 我们知道, 布尔函数和布尔表达式这两个概念是相互对应

的, 即给了任何一个布尔函数, 我们可以找到一个表示此函数的布尔表达式. 反之, 任给一个布尔表达式, 即确定一个布尔函数.

例 3 已知 $f(0,0) = f(1,0) = f(1,1) = 1$, $f(0,1) = 0$, 求 $f(x_1, x_2)$.

解 由定理 2.2.2, $f(x_1, x_2) = f(0,0)x_1'x_2' + f(0,1)x_1'x_2 +$
 $f(1,0)x_1x_2' + f(1,1)x_1x_2$
 $= x_1'x_2' + x_1'x_2 + x_1x_2$
 $= x_2'(x_1' + x_1) + x_1x_2$
 $= x_2' + x_1x_2$
 $= x_1 + x_2.$

习题 4

1. 求下列布尔表达式标准积和范式(主析取范式)与标准和积范式(主合取范式).

(1) $F_1(A, B, C) = AB + A'C + (BC)'$

(2) $F_2(A, B, C) = (A+B)' + B + C'$

(3) $F_3(A, B, C) = A' + B'C$

2. 求由下列真值表确定的布尔函数的标准积和范式与标准和积范式.

(1)

A	B	$G(A, B)$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

(2)

A	B	C	$G(A, B, C)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0



布尔与布尔代数

布尔，英国伟大的数学家兼逻辑学家。他出生在英国林肯郡，家境贫寒，父亲是鞋匠，无力供他读书。他的学问主要来自于自学，年仅12岁就掌握了拉丁文和希腊文，后来又自学意大利语与法语。由于生活所迫，16岁即开始在中学任教，以维持生活。1835年他在家乡创办一所中学。从20岁起对数学发生了浓厚兴趣。为了提高数学修养，他广泛涉猎一些大数学家的名著，并刻苦钻研，终于修成正果，于1841年初露锋芒，写出一篇有关不变量计算的论文，受到数学界重视。

布尔对数学和逻辑学最大的贡献是创立了逻辑代数，为数理逻辑奠定了基础。1847年，他发表了重要的专著《逻辑的数学分析》，阐述了使语言符号化的基本思想，实现了100年前莱布尼茨要使逻辑数学化的理想，并为100年后的计算机理论奠定了基石。1854年，他又出版了逻辑代数的代表作《思维法则研究》，系统归纳了这种新理论，后人称之为布尔代数。这样布尔理所当然地成为数理逻辑这个对数学、逻辑学和哲学都非常重要的领域的创始人之一。1849年起任科克女皇学院教授，1857年被选为英国皇家学会会员。

学术界公认的是：如果你在人类知识的金字塔上添加一小块石头，那么你就没有虚度年华。而布尔却创建了一座理性的金字塔，因此他是数学和逻辑领域中的顶级大师。他是伟大的革新家。他的思想使他那个时代的数学和逻辑学整个改变进程，其影响从横向看至少跨越数学、逻辑学和哲学这三大领域；从纵向看已超过一个世纪，而且与时俱进，影响越来越大。德·摩根曾经说过：“数学和逻辑是精确科学的两只眼睛……”在布尔之前这两只眼睛是孤立地各自在观察世

界，是布尔使这两只眼睛有机地结合成一双完整的眼睛，使我们对世界的观察更加深远，更加宽广，因此他的成果具有方法论的意义，可以相信其影响是永恒的。

自公元前 300 多年，亚里士多德 (Aristotle) 创立逻辑学以来，在两千多年时间中，由于逻辑学在自然语言中被描述，由于自然语言的模糊性与多义性，致使逻辑学中诡辩与悖论丛生，争论不休，几乎没有什么重大进展。由于布尔的工作情况发生了彻底的变化，因此美国数学家贝尔 (Bell) 非常形象地评论布尔对逻辑学的贡献说：“布尔剥下了逻辑学这条泥鳅的头，使它固定下来，不再游来滑去。”

像布尔这样伟大的数学家，逻辑学家在历史上是屈指可数的，一般认为这需要一定的社会环境才能造就出来，历史上许多大数学家都来自名门望族，从小接受良好的教育，如达朗贝尔、笛卡儿、费尔马、庞加莱和冯·诺伊曼等，即使不是名门望族也至少是中产阶级或个别幸运地受到资助的人，如牛顿。因为数学家需要长时间致力于思考他们试图解决的问题，这就几乎自动地把许多需要花精力解决自己温饱的贫寒人士排除在外。布尔也从未得到过名师的指点，他又生活在远离学术文化中心、大图书馆和著名高等学府的爱尔兰小城市中，在没有天时、地利和人合的情况下，取得如此惊人成就的数学家可以说是空前绝后的，因此更值得我们崇敬，也更应该激励那些没有优越环境的有志青年，树立远大理想。

最后，让我们以一首打油诗结束本文，以加深印象。

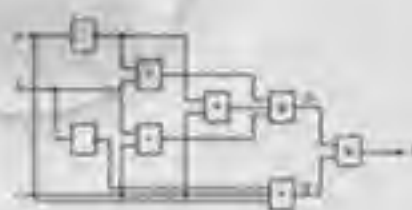
自古逻辑哲学附，
千年来迹是寥寥，
谁料英伦出布尔，
从此逻辑谈姓“数”，
数学大厦奠基础，
继将电脑理论铺，
儿孙“开关”年虽幼，
信息时代挑重负。

第 3 章

开关电路

如果将本书第一章比喻成播种，第二章是开花，那么本章就是结果和收获。本章有大量有趣的、典型的开关电路设计实例，由浅入深，循序渐近。通过这些实例的学习，可以培养和训练我们分析问题和解决问题的能力，同时也可以检验我们对前两章理解、掌握和灵活运用能力，希望读者通过这些实例举一反三，设计出更多、更好的实用电器来。

A	B	C	$f(A,B,C)$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0



在历史上,布尔为了实现逻辑的数学化,于1847年创立了逻辑代数,后发展成为布尔代数。

1938年美国电器工程师申农发现,将二元布尔代数,作适当的解释,则它就是开关电路的数学模型,即开关代数。

开关电路的基本概念已在第1章第1节作过介绍,本章我们主要用第2章中学到的布尔代数理论来解决开关电路的设计。

由于历史原因,开关代数中的一些名称往往借用逻辑代数中相应的名称,例如并联运算常称或运算,串联运算则称与运算,而反相则称非运算……

3.1 开关电路设计

现在我们已经具备了设计开关电路的基础知识和数学工具,对一个具体的问题,要根据对电路功能的文字描述,首先,根据因果关系确定哪些是输入变量,哪些是输出变量,然后按输入(自变量)、输出(因变量)的逻辑关系(即确定输出是1和0的条件)建立真值表(或布尔函数),然后按布尔函数画出电路图。记得在本课程开始时,曾要求同学们探索的问题,现在让我们从这些问题入手!

例1 楼梯中间安装一电灯,楼上、楼下各装一开关,要求每个开关的状态改变均可改变电灯的当前状态。试设计一开关电路满足这一要求。

解 显然开关是输入(自变量),电灯是输出(即自变量的函数)。

设用 x 表示开关1, y 表示开关2,则电灯是 x, y 的二元函数。用 $f(x, y)$ 表示,不妨假设 x, y 都闭合时电灯亮,即 $x=y=1$ 时, $f(x, y)=1$ 。然后根据要

求将输入与输出之间的逻辑关系(即确定电灯亮和灭的条件)用真值

x	y	$f(x, y)$
1	1	1
1	0	0
0	0	1
0	1	0

(注意,这里没有按真值表中要求来排列,通常为了便于计算,每次只能有一个自变量变化。这样可给函数值(电灯状态)可依秩序,依次出现。

表描述出来，表中从上而下每次只有一个开关改变状态，而电灯随之依次改变它的原有状态。

然后，由定理 2.2.2，求出 $f(x, y)$ 的布尔表达式，即

$$f(x, y) = x \cdot y + x' \cdot y'$$

最后，按求得的表达式，画出电路图 3-1。

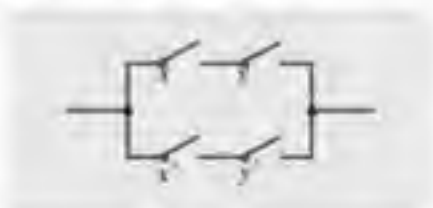


图 3-1

实际上，为了实现该电路，我们还应该选择元器件，这里我们选择两个单刀双掷开关，按图 3-2 接线即可。

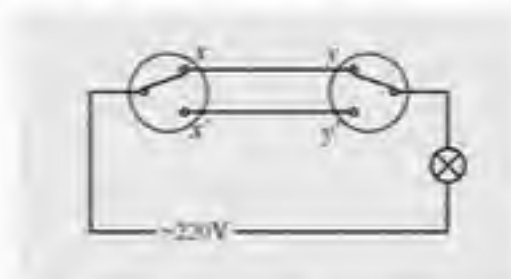


图 3-2

图 3-2 是示意图，为了更接近实际，我们选用双连拉线开关，并画出实际安装图 3-3。

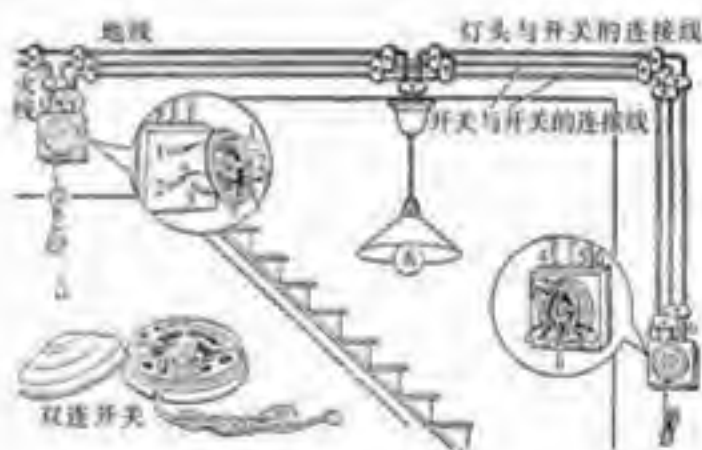


图 3-3

双连开关的工作情况如图 3-4 所示:

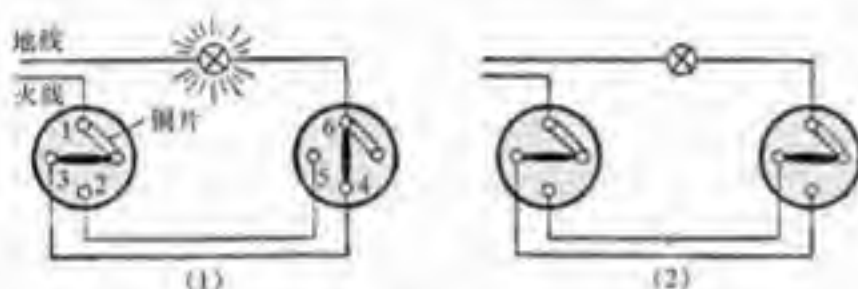


图 3-4

例 2 大厅中间有一顶灯, 由安装在大厅的三个入口处的开关独立控制, 即任何一个开关均可改变灯的当前状态, 试设计一个符合要求的开关电路.

解 本问题和例 1 中的问题类似, 只不过控制开关从二个变成三个.

设 A, B, C 分别表示三个开关, 现在电灯是 A, B, C 的三元函数, 用 $f(A, B, C)$ 表示. 根据要求: $f(A, B, C)$ 的状态改变当且仅当 A, B, C 中有且仅有一个状态改变. 当 $A=B=C=1$ 时, 我们不妨指派 $f(A, B, C)$ 的值为 1, 然后按表 3.1 最左一行所标的顺序依次使 $f(A, B, C)$ 的值 $1 \rightarrow 0 \rightarrow 1 \rightarrow \dots$ 交替变化. 标号的顺序是按

表 3.1

标号	A	B	C	$f(A, B, C)$
1	1	1	1	1
2	1	1	0	0
4	1	0	1	0
3	1	0	0	1
8	0	1	1	0
7	0	1	0	1
5	0	0	1	1
6	0	0	0	0

每个标号与它前一个标号中的 A, B, C 中两个状态相同, 一个状态不同排出的。

然后由定理 2.2.2 求出 $f(A, B, C)$ 的布尔表达式, 即

$$\begin{aligned} f(A, B, C) &= ABC + AB'C' + A'BC' + A'B'C \\ &= A(BC + B'C') + A'(BC' + B'C), \end{aligned}$$

其电路图如图 3-5 所示。

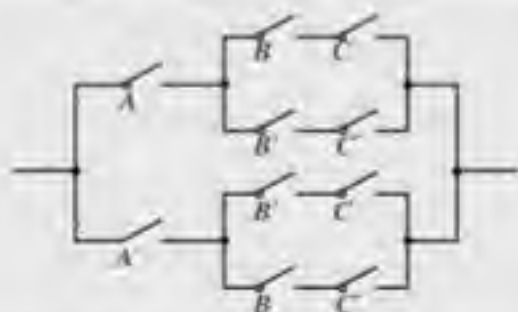


图 3-5

为实现该开关电路, 开关 B, C 应选择双刀双掷开关, 它有两个联动的刀片, 即同时向上掷向接点 B , 或同时向下掷向接点 B' , 如图 3-6 所示。

这样, 以上电路的实际接线如图 3-7 所示。

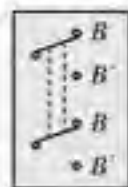


图 3-6

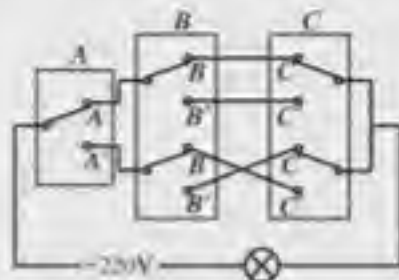


图 3-7

例 3 一个三人委员会以票数过半决定问题, 每个成员以按下 (即接通开关) 按钮表示“赞成”票, 构造一个开关电路, 使其当且仅当赞成票过半时允许电流通过。

解 令 A, B, C 分别表示第一, 第二, 第三个成员赞成, 则赞成票过半的充要条件是:

$$(A \cdot B) + (B \cdot C) + (C \cdot A) = A \cdot (B + C) + B \cdot C$$

其电路图如图 3-8 所示。

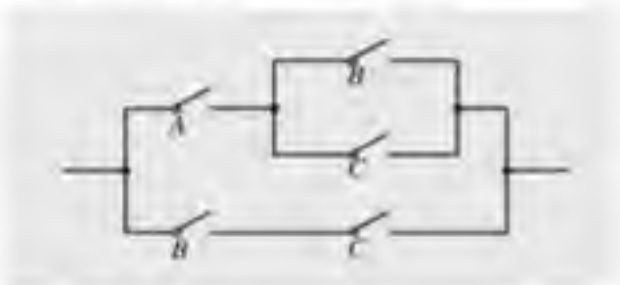


图 3-8

在本例中说明，有些问题我们可以根据所给条件直接得出它的布尔表达式，则可省去列真值表这一步，其实列真值表的目的就是帮助我们分析函数关系，然后通过真值表求出布尔表达式。

例 4 现在让我们设计一个功能更强的投票装置，它更接近实用。

有一个三人委员会，每人有两个按钮，一个表示赞成，一个表示反对。在所有成员都投票后，若多数赞成则绿灯亮，否则红灯亮；若不是全体成员都投了票，则黄灯亮，若任一成员同时按两个按钮即违反投票规则，则所有灯都不亮，但蜂鸣器发声，试设计这样一个开关网络。

解 设 A, B, C 分别表示第一、第二、第三个成员的赞成票，

a, b, c 分别表示第一、第二、第三个成员的反对票，

g, r, y 分别表示绿、红、黄灯亮，

z 表示蜂鸣器响，

v 表示所有成员都投了票，

则有

$$v = (A + a) \cdot (B + b) \cdot (C + c)$$

$$z = A \cdot a + B \cdot b + C \cdot c$$

$$g = v \cdot (AB + BC + CA) \cdot z'$$

$$r = v \cdot (ab + bc + ca) \cdot z'$$

$$y = v' \cdot z'$$

其电路图如图 3-9 所示。

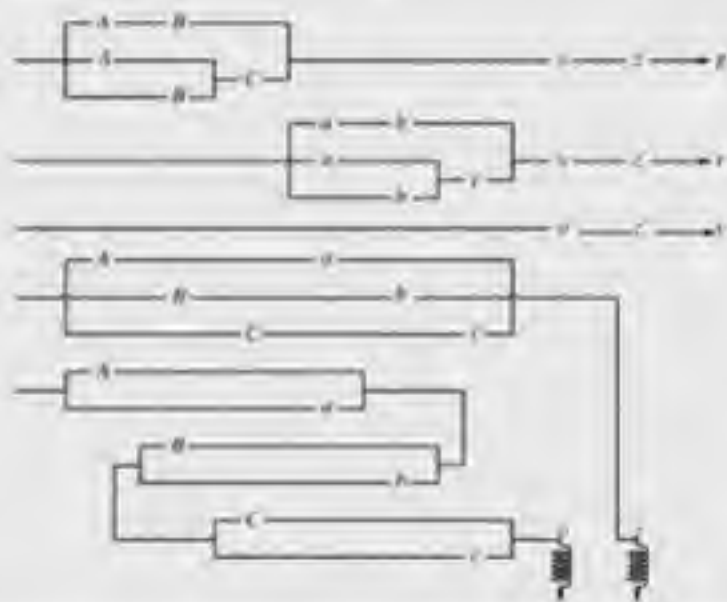


图 3-9

说明 1. 这个问题中的输出不止一个，而是 5 个，可看成 5 个子系统。

2. 这些输出中有些还是其他的输入，如 v 和 z ，因此采用继电器开关，实现从输出到另一级输入的转变。

从上述几个实例，我们可以总结出解决实际问题的步骤：

(1) 找出问题中的输入(自变量)与输出(函数)，将每个输入用两种状态表示，如 1 和 0 或 A 和 A' ；

(2) 用真值表或布尔表达式正确表述设计要求；

(3) 如有必要，可将一个问题分解成若干个较小的子问题，最后将这些子问题综合成原问题（如例 4）；

(4) 将得到的布尔表达式尽量化简，将在以后用专节讨论；

(5) 根据设计目标及限制条件，选择组件完成系统设计（如例 4，选用继电器开关）；

(6) 根据布尔表达式画出电路图。

其流程图如图 3-10 所示。



图 3-10

习题 5

1. 设计一个自动门的控制电路，使有人进门或出门以及有人同时进门和出门时，门自动打开。
2. 在举重比赛中，有三个裁判。当裁判认为杠铃已完全举上时，就按一下自己面前的按钮。现在假定在主裁判面前的按钮是 A ，两个副裁判面前的按钮分别是 B 和 C 。 Z 表示完全举上的灯泡，只有在三个裁判都按下自己面前的按钮，或者有两个裁判（其中一个必是主裁判）按下自己面前的按钮时，灯泡才亮。试设计这样一个电路。
3. 在一台棋赛计时器上为下棋双方各设有一个电钟和一个按钮。当一方走完一步时，就按下自己的按钮，这样就可以停止自己的时钟同时启动对方的时钟。试用两个继电器设计这个计时器的控制系统。
4. 某学校有一个校长、两个副校长和两个主任（教务和总务），设有一保密室有 5 把钥匙，分别是 A, B, C, D, E ，校长拿的是 A ，副校长拿的是 B, C ，主任拿的是 D, E 。现规定：校长单独一人可打开房门，两个副校长一起可以打开房门，一个副校长和两个主任一起也可以打开房门。试设计这样一个控制电路。
5. 请为某火车站设计一个自动调度控制电路，站台形状如图 3-11 所示。设火车从箭头方向进站。在 G 处有一信号灯，该灯亮时表示火车可以进站； P_1 表示命题“站台 1 空着”， P_2 和 P_3 分别表示“站台 2 空着”和“站台 3 空着”； S_1 和 S_2 表示开放绿灯，即允许火车通行； t_1 和 t_2 表示该处的转辙器已拨至允许转弯的位置。

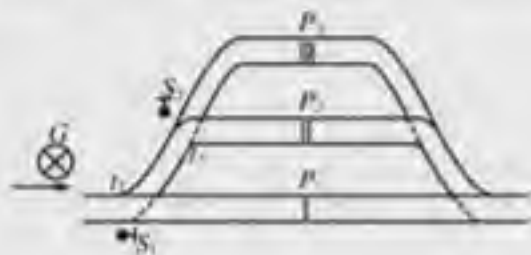
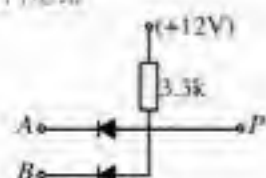


图 3-11

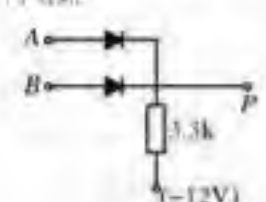
(提示：求 G 与 P, S, t 的关系)

这里为了直观易懂，我们用继电器开关来说明信号可以引起开关动作，再导致信号输出从而引出门电路。但实际上，在继电工业非常发达的今天，实现各种门电路的方法很多，而且体积可以做得非常小，速度很快。这里我们仅举用二极管或三极管实现三种门电路为例。

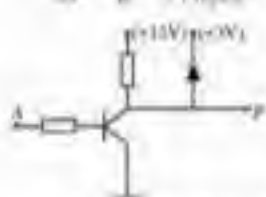
1. 二极管“与”门电路



2. 二极管“或”门电路



3. “非”门电路



在图 3-12 中， A 为输入变量（信号）， P 为输出变量（信号）。它们或成为高电平（+5V），这时说它值为 1；或为低电平（0V）（低电平），这时说它值为 0。请参看二极管正向导电，自行分析。

3.2 门电路

在上节开关电路中，我们一直很少注意引起开关动作的方式，开关可用人力或其他办法拨动，如上节例 4 中的开关 v 和 z 就是采用继电器开关，它是由其前级接通后的电流信号启动的，当电流流过线圈 v （或 z ），产生磁力，使开关 v （或 z ）工作，这样，从信号的观点看单个开关就是由 1 个输入信号产生 1 个输出信号的器件，让我们用继电器开关为例来说明，见图 3-12 和图 3-13。

我们看到图 3-12 中输入与输出的信号是一样的，但它可以将信号 a 从一个网络传送到另一网络中去，如上节例 4 中的 v 。

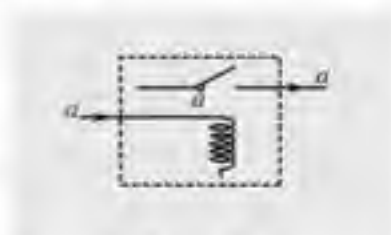


图 3-12

图 3-13 中的输入信号与输出信号正好相反，输入是 a 而输出是 a' 。

具有这种逻辑功能的电路就是反相电路，逻辑上相当于“非”运算。

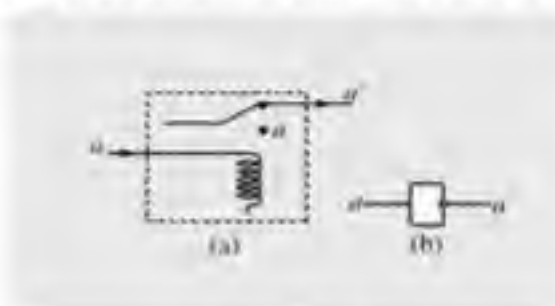


图 3-13

设想图 3-13 (a) 中方框是一元器件的封装，从外部看它只有一个输入端和一个输出端，而且输出信号始终与输入相反，我们就把这种功能的元器件叫“非门 (negation gate)”，既然不关心它内部的结构，我们就可以简化它的图示，见图 3-13 (b)。

当由两个开关经串联或并联而成的电路时，我们可以将它们看成有两个输入和一个输出的器件，见图 3-14 和图 3-15。

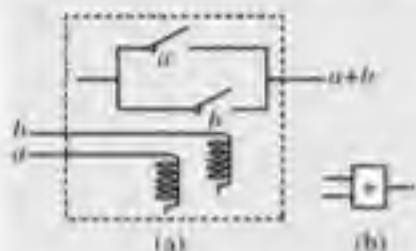


图 3-14

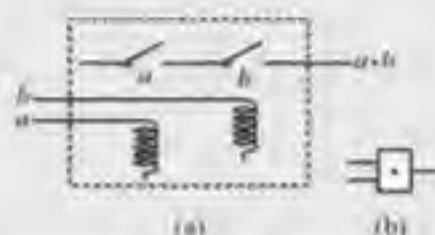


图 3-15

图 3-14 中输出端有信号的充要条件是 a 有信号或 b 有信号，我们把具有这种逻辑功能的元器件称为“或门 (OR gate)”，并用图 3-14 (b) 中的符号表示。图 3-15 中的输出端有信号的充要条件是 a 有信号与 b 有信号，因此它具有逻辑连接词“与”的功能，故称它为“与门 (AND gate)”，并用图 3-15 (b) 中的符号表示。

当然，我们还可以设计出其他的“门”，如“与非门”，“或非门”……但是或门、与门和非门这三种门是最基本的、最重要的，它们对应逻辑中的三个主要连接词 \vee (或)， \wedge (与)， \neg (非)，亦即布尔代数中的三个运算“+”、“ \cdot ”、“ $'$ ”，而且它们是充分的，即所有其他逻辑功能都可由这三个门组合得到。

有了这三种基本的门元件，在布尔表达式与它的电路图表示之间的变换更加简单容易。

例 1 求 $a' + b \cdot c$ 的电路图。

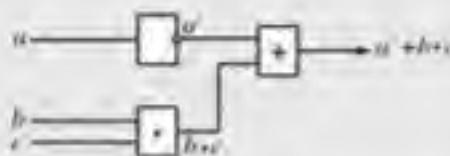


图 3-16

例 2 求电路图 3-17 的输出。

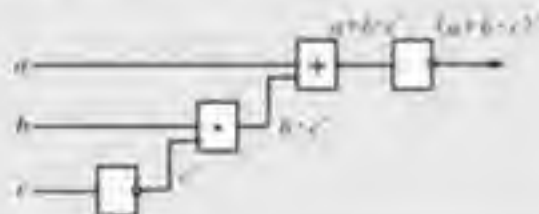
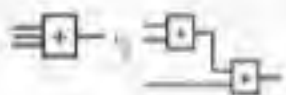


图 3-17

注：这里将“或门”和“与门”的输入从两个推广到三个甚至可以多推广到 n 个，这并没有本质的差别，例如：



是等价的。

解 $(a+b \cdot c)^2$

例 3 化简下列网络。

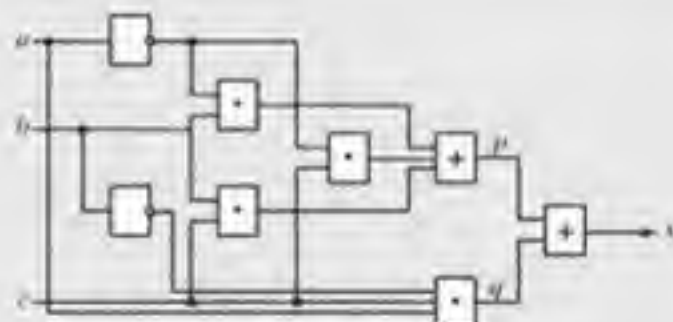


图 3-18

解 $p = a'b + bc + ca'$, $q = a \cdot b' \cdot c$

$$\begin{aligned} x &= p + q \\ &= a'b + bc + ca' + ab'c \\ &= a'b + c(b + a' + ab') \\ &= a'b + c(b + a' + b') \\ &= a'b + c. \end{aligned}$$

化简后的电路图如图 3-19。

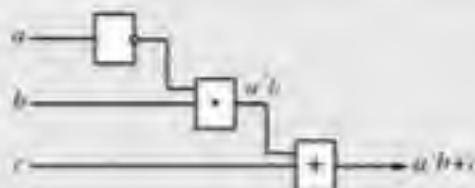


图 3-19

例 4 试设计一种用来锁保险箱的保密电锁的控制电路，锁上有三个键 A, B, C ，当 A, B, C 同时按下，或 A, B 同时按下或 A, B 中任何一个按下，锁即打开。

解 设锁打开为 F ，则它的逻辑表达式为

$$\begin{aligned} F &= ABC + ABC' + AB'C' + A'BC' \\ &= AB(C + C') + AB'C' + A'BC' \\ &= AB + AB'C' + A'BC' \\ &= AB + AC' + A'BC' \end{aligned}$$

(交叠律)

$$\begin{aligned}
 &= B(A + A'C') + AC' \\
 &= B(A + C') + AC' \quad (\text{交叠律}) \\
 &= AB + BC' + AC'
 \end{aligned}$$

其逻辑电路图如图 3-20。

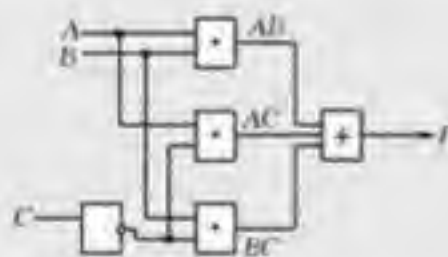


图 3-20

例 5 设计一个一位的二进制数值比较器，要求比较器的输出反映出 $A > B$ ， $A < B$ ， $A = B$ 的情况。

解 (1) 决定输入变量与输出变量，并列出真值表。

要求对一位二进制数的大小进行比较，必须有两个输入变量，设为 A 、 B ，两数比较，会出现三种结果：大于、等于、小于，因此有三个输出变量，分别以 L_1 、 L_2 、 L_3 表示，因此得到真值表 3.2。

表 3.2

输入		输出		
A	B	$L_1 (A > B)$	$L_2 (A = B)$	$L_3 (A < B)$
0	0	0	1	0
0	1	0	0	1
1	0	1	0	0
1	1	0	1	0

(2) 根据真值表分别写出 L_1 、 L_2 、 L_3 的布尔表达式。

$$\begin{aligned}
 L_1 &= AB', \\
 L_2 &= A'B' + AB, \\
 L_3 &= A'B.
 \end{aligned}$$

(3) 画出逻辑门电路图。

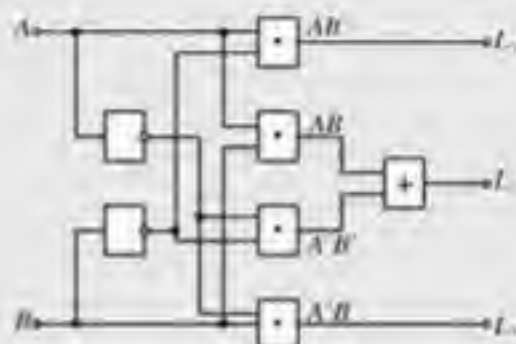


图 3-21

例 6 全加器的逻辑设计。

加法器是任何一台计算机的基本组件，它由全加器连接而成，所谓全加器是一个能完成一位数相加的部件。

为了说明全加器的结构，先来看一下两个二进制的加法运算。

设 $y=0101$, $x=0011$, 求它们的和 $H=x+y$ 。求和过程可用算式表示如图 3-22。

	1	1	1	0	进位数
	0	1	0	1	被加数
+	0	0	1	1	加 数
	1	0	0	0	和 数

图 3-22

因为两数相加，对每一数位来说，是三个数参加运算，因此全加器应该有三个输入端，分别对应被加数 A 、加数 B 和较低位来的进位数 J_i 。相加结果得到本位的和数 H 以及向较高位的进位数 J_{i+1} ，因此应有两个输出端，如图 3-23 所示，其输出与输入的真值表见表 3.3。

表 3.3



图 3-23

A	B	J_i	H	J_{i+1}
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

由真值表得到输入与输出的函数关系为

$$H = A'B'J_0 + A'B'J_1 + AB'J_2 + AB'J_3,$$

$$J_1 = A'B'J_0 + AB'J_2 + AB'J_3 + AB'J_4,$$

$$= A'B'J_0 + AB'J_2 + AB,$$

有了全加器，将它们按图 3-24 所示连接起来就是加法器。

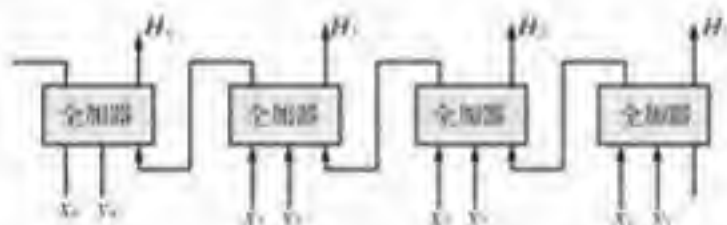


图 3-24

最后，让我们将开关电路设计比作造房子，我们可以从最基本的材料，如砖头、木材开始；但是更有效的方法是我们可以在工厂中做好一些零部件，如墙体、门窗等，这样造房子的人就不必从砖头一块一块地砌墙，也不必将木材加工成门窗，只要将已做好的零部件装配起来即可，开关相当于砖木，而各种“门”就相当于预制件，所以开关电路和门电路没有本质上的区别，只是原始材料不同，以各种“门”作原料的电路常称逻辑电路或门电路。

通过前面的学习，我们虽然引入很多重要的概念，但是有许多概念是彼此等价和互相可转化的，例如

布尔函数 \Leftrightarrow 布尔表达式

\Leftrightarrow 真值表

\Leftrightarrow 门电路（逻辑电路）

\Leftrightarrow 开关电路。

因此，开关电路设计的关键是找出实际问题的数学模型，即它的布尔表达式或真值表。

既然开关电路和布尔函数概念是彼此等价和相互可转化的，那么将布尔函数化简，就意味着将开关电路化简，下一节我们将讨论布尔函数的化简。

习题 6

1. 作出相应于下列布尔表达式的逻辑电路。

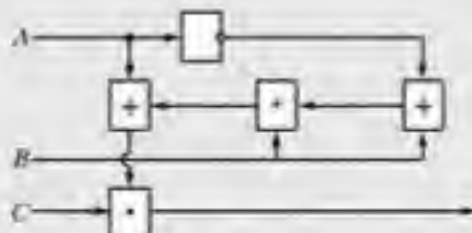
(1) $(A \cdot B') + (B \cdot (C + A'))$;

(2) $(A' + B) + (C' \cdot A)$;

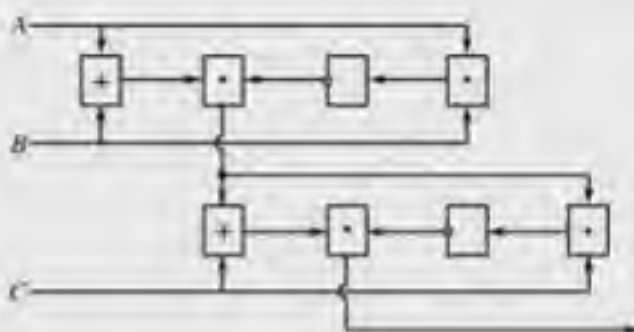
(3) $(A + B)' \cdot ((A \cdot B') + C)$.

2. 写出相应于下列逻辑电路的布尔表达式。

(1)



(2)



3. 设 $x = x_1x_2$, $y = y_1y_2$ 是两个二进制数, 试写出判断 " $x > y$ " 的逻辑表达式, 并分别画出开关电路图和逻辑电路图。

4. 请将 2 题 (1) 的逻辑电路图改成开关电路图。

多知道一点

应用实例参考

材料1 自动售货机。

设计一自动售饮料的机器，设该种饮料的价格是1.50元一瓶，该机只能接受1元和5角这两种硬币，当投入的硬币总值超过饮料价格时，机器应给出一瓶饮料，并找回多余的钱。

解 (1) 确定输入变量和输出变量。

显然，投硬币是输入变量，因有两种硬币，故自变量应有两个，设 A 表示投一元硬币的个数， B 表示投五角硬币的个数，根据饮料的价格， A 的可能取值为0, 1, 2，而 B 的可能取值为0, 1, 2, 3，由于在二元布尔代数中，变元只能取0, 1二值，为了表示2, 3这些数，要用二位二进制数来表示，所以令 $A=x_1x_2$ ， $B=x_3x_4$ ，这样我们实际输入应该是 x_1, x_2, x_3, x_4 。

输出变量应该是给出饮料 Y_1 和找回余额 Y_2 ， $Y_1=0$ 表示不给饮料， $Y_1=1$ 表示给饮料， $Y_2=0$ 表示不找余额， $Y_2=1$ 表示找回余额。

(2) 列出真值表。

表 3.4

x_1	x_2	x_3	x_4	Y_1	Y_2
0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	1	0
0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1

(3) 写出输出变量的布尔表达式。

$$\begin{aligned} Y_1 &= x_1'x_2'x_3x_4 + x_1'x_2x_3'x_4 + x_1'x_2x_3x_4' + x_1'x_2x_3x_4 + \\ &\quad x_1x_2'x_3'x_4' + x_1x_2'x_3x_4' + x_1x_2'x_3'x_4 + x_1x_2'x_3x_4 + \\ &\quad x_1x_2x_3'x_4' + x_1x_2x_3'x_4 + x_1x_2x_3x_4' + x_1x_2x_3x_4 \\ &= x_1 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_3x_4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_2 &= x_1'x_2x_3x_4' + x_1'x_2x_3x_4 + x_1x_2'x_3'x_4' + x_1x_2'x_3'x_4 + \\ &\quad x_1x_2'x_3x_4' + x_1x_2'x_3x_4 + x_1x_2x_3'x_4' + x_1x_2x_3'x_4 + \\ &\quad x_1x_2x_3x_4' + x_1x_2x_3x_4 \\ &= x_1 + x_2x_3. \end{aligned}$$

(4) 画出门电路图。

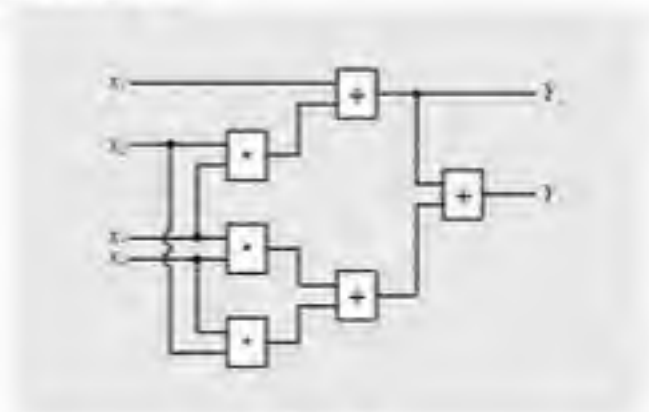


图 3-25

材料 2 数字显示控制电路。

在很多电子设备中，采用荧光数码管显示数字，这种数码管是一种特殊结构的电子管，它的七个阳极排列成图 3-26 所示形状，利用



图 3-26

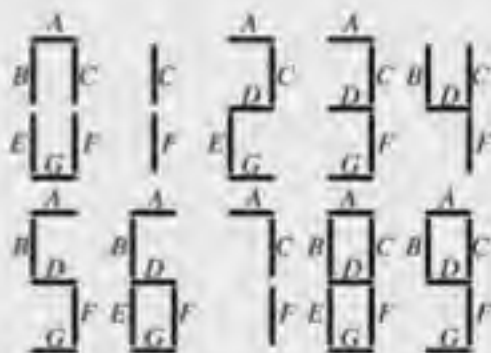


图 3-27

七个阳极亮与不亮的适当组合显示 0~9 这十个数码。这些组合示于图 3-27 中。要求设计一个逻辑电路，它的输入是二进制编码的十进制数，而输出是七段显示的相应的十进制数。

根据图 3-27 所示的组合,要显示的数字和输入、输出的对应关系,列于表 3.5 中。

表 3.5

输入 <i>abcd</i>	显示 字形	输出信号						
		<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>
0000	0	1	1	1	0	1	1	1
0001	1	0	0	1	0	0	1	0
0010	2	1	0	1	1	1	0	1
0011	3	1	0	1	1	0	1	1
0100	4	0	1	1	1	0	1	0
0101	5	1	1	0	1	0	1	1
0110	6	1	1	0	1	1	1	1
0111	7	1	0	1	0	0	1	0
1000	8	1	1	1	1	1	1	1
1001	9	1	1	1	1	0	1	1

由部分真值表 3.5, 得各命题的布尔表达式, 并化简。

$$\begin{aligned} A &\cong a'b'c'd' + a'b'cd' + a'b'cd + a'bc'd + \\ &\quad a'bcd' + a'bcd + ab'c'd' + ab'c'd \\ &\cong b'd' + bd + a + c, \\ B &\cong a + c'd' + bc' + bd', \\ C &\cong b' + bc'd' + cd, \\ D &\cong a + b'c + bc' + cd', \\ E &\cong b'd' + cd', \\ F &\cong b + c' + d, \\ G &\cong a + b'd' + b'c + bc'd + cd'. \end{aligned}$$

然后请同学们自行画出逻辑线路图。

表 1 表 2 中有 4 个型元, 命该有 2⁴ = 16 个函数, 但由 1939—1941 的情况在本例中乎不会出现。故 A, B, C, D, E, F, G 在这段消散的值没有给出, 这样, 这七个函数都是部分定义的布尔函数 (即在 0000—1011 是有定义的, 而在 1010—1111 是未定义的), 这样的函数称作多个, 彼此不是完全相等, 但在 0000—1011 是相等的, 在证明它们可以彼此代替, 我们选择其中最简单的。为了不致引起误会, 用 “—” 符号代替 “—” 号。

本节可得些实际经验需要，供读者。

* 3.3 布尔函数的化简

我们知道，一个布尔函数可以用不同的布尔表达式来表示，例如

$$\begin{aligned}
 F &= AB + A'C \\
 &= AB + A'C + BC \\
 &= ABC + ABC' + A'B'C + A'BC \\
 &= [(AB)' \cdot (A'C)']' \\
 &= [(A' + B') \cdot (A + C')]^1 \\
 &= \dots
 \end{aligned}$$

在各种不同表达式中，有的较简单，有的较复杂。简单的表达式不仅使我们更易把握电路的本质，更重要的是使相应的开关电路节省元器件，降低成本，提高可靠性和效率。因此布尔函数的化简，在开关电路设计中具有重要的理论和实践意义。现已发展出多种有效的化简方法，本节我们仅介绍其中最基本的一种方法。

代数化简法

代数化简法是运用布尔代数中的定律、规则等逐步将复杂的布尔函数变换成与它相等的最简单的函数，这种方法非常灵活，没有统一的程序可循，故只好举例说明。

例 1 并项法。

$$\begin{aligned}
 F &= ABC + ABC' \\
 &= AB(C + C') && \text{(分配律)} \\
 &= AB && \text{(逆元律、么元律)}
 \end{aligned}$$

例 2 配项消去法。

$$\begin{aligned}
 F &= AC + AD + C'D \\
 &= AC + AD \cdot (C + C') + C'D && \text{(么元律、逆元律)} \\
 &= AC + ACD + C'D + C'DA && \text{(分配律、交换律)}
 \end{aligned}$$

$$= AC + C'D, \quad (\text{吸收律})$$

例3 吸收法:

$$\begin{aligned} F &= (A + AB + ABC) \cdot (A + B + C) \\ &= A \cdot (A + B + C) \quad (\text{吸收律}) \\ &= A + AB + AC \quad (\text{分配律、幂等律}) \\ &= A. \quad (\text{吸收律}) \end{aligned}$$

例4 消去法:

$$\begin{aligned} F &= AB + A'C + B'C + C'D + D' \\ &= AB + A'C + B'C + C' + D' \quad (\text{交叠律}) \\ &= AB + A' + B' + C' + D' \quad \text{同上} \\ &= B + A' + B' + C' + D' \quad \text{同上} \\ &= 1. \quad (\text{极元律、逆元律}) \end{aligned}$$

用代数法化简,要熟练地掌握和灵活地运用布尔代数中的定律、定理和规则,这需要记住许多公式,直观性差,又难以判断所得结果是否最简,因此介绍下面一种直观性很强的化简法——卡诺图法,作为参考读物。

多 知 道 一 点

卡诺图化简法

此法是由贝尔实验室电器工程师卡诺 (Karnaugh, M) 于 1953 年提出。

1. 卡诺图的构成。

卡诺图是把真值表图形化的形式,真值表可以看成是一个函数 n 个变量的全部最小项构成的纵列表,而在卡诺图中,我们把最小项用一小方格来表示,这样 n 个变量就用 2^n 个小方格来代表其全部最小项,在选择方格代表那个最小项时,要使相邻方格所表示的两项恰好有一

个变元不同。对 $n=2, 3, 4$ 相应的卡诺图如图 3-28 (a), (b), (c) 所示。

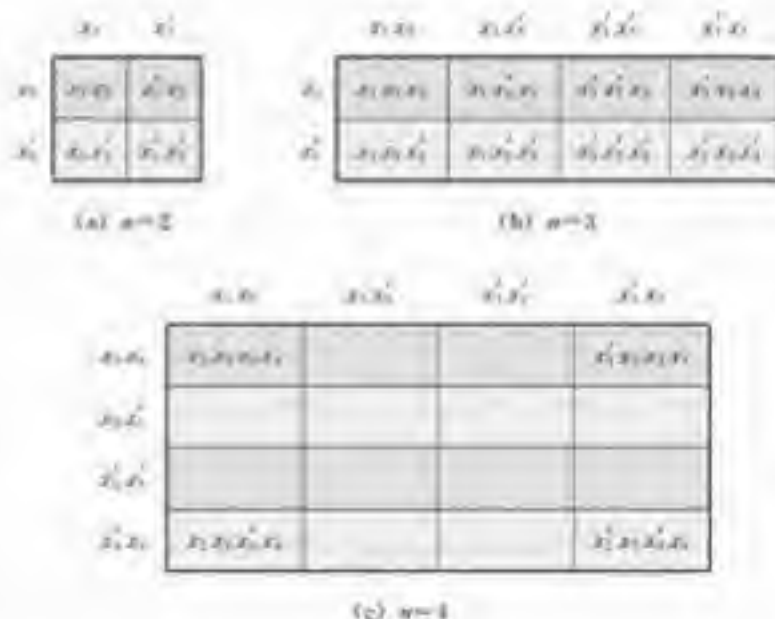


图 3-28

每个小方格代表的最小项，可由该小格的最上端和最左端所标的两个子项的乘积来得到。容易看出图中相邻两格所表示的两个最小项恰有一个变元不同。但在 (c) 中，小格 $x_1 x_2 x_3 x_4$ 与 $x_1 x_2 x_3' x_4$ 以及 $x_1' x_2 x_3 x_4$ 也恰有一个变元不同。因此，我们把卡诺图的顶线和底线看成是同一条线，将左、右端两条线也看成是同一条线。这样一来， $x_1 x_2 x_3 x_4$ 所在的小格与 $x_1 x_2 x_3' x_4$ 所在的小格以及与 $x_1' x_2 x_3 x_4$ 所在的小格都是相邻的。

下面讨论如何应用卡诺图来合并小方格（或最小项）。以 $n=4$ 的卡诺图为例来说明。由于卡诺图中有一条公共边的小方格恰好有一个变元不同，因此可以组合成一个包含二个方格的长方形，该长方形恰好代表两小格中相同的变元所成的积项。如在图 3-29 中 $a = x_1 x_2 x_3 x_4$ ， $b = x_1 x_2 x_3 x_4'$ 具有一条公共边，组合成长方形，表示积项 $x_1 x_2 x_3$ 。同样 $c = x_1 x_2' x_3 x_4$ 与 $d = x_1 x_2' x_3 x_4'$ ，可组合成 $x_1 x_2' x_3$ 。而 e 与 f 可组合成 $x_1 x_2 x_3'$ 。余类推。



图 3-29

进而，两个有公共边的长方形又可以组成有四个方格的正方形或长方形，如 a, b, c, d 和 a, b, e, f ，前者表示积项 $x_1'x_2'$ ，后者表示积项 x_2x_3 。

2. 应用卡诺图求布尔函数的最简式。

步骤如下：

- (1) 作图、填图。
- (2) 圈极大圈、求质蕴含项。
- (3) 寻求最小覆盖，写出最简表达式。

这里先介绍几个概念。

蕴含项——在函数的和积范式中，每个积项都称为该函数的蕴含项。例如 $y = x_1x_2x_3' + x_1' + x_2x_3'$ 中， $x_1x_2x_3'$ 、 x_1' 、 x_2x_3' 都是该函数的蕴含项。

质蕴含项——若函数的某一蕴含项不能全部被包含在其他任一蕴含项中，则此项称为质蕴含项。在卡诺图中，即为极大圈所对应的积项。如上例中 x_1' 、 x_2x_3' 是质蕴含项，而 $x_1x_2x_3'$ 则不是，因为它全部被包含在 x_1' 中。

必要的质蕴含项——至少包含一个其他任一质蕴含项都不包含的标“√”的小方格的质蕴含项。

下面举例说明化简过程。

例 化简函数：

$$F = x_1x_2x_3x_4 + x_1x_2x_3x_4' + x_1x_2'x_3'x_4' + x_1x_2'x_3'x_4 + x_1'x_2'x_3x_4 + x_1'x_2'x_3x_4' + x_1'x_2'x_3'x_4 + x_1'x_2'x_3'x_4' + x_1'x_2x_3x_4 + x_1'x_2x_3x_4' + x_1'x_2x_3'x_4 + x_1'x_2x_3'x_4'$$

1. 作 $n=4$ 的卡诺图, 并在代表 F 中的最小项的方格中填上“√”(见图 3-30)。

	x_1x_2	x_1x_2'	$x_1'x_2$	$x_1'x_2'$
x_3x_4	√		√	√
x_3x_4'	√		√	√
$x_3'x_4$		√	√	
$x_3'x_4'$		√	√	

图 3-30

2. 圈极大圈, 求质蕴含项。

将可能合并的相等√方格最大限度按 2^n 个圈一圈, 得到如下 4 个质蕴含项

$$x_2x_3, x_2'x_3', x_1'x_2', x_1x_3$$

由于 $x_1'x_2'$ 不包含独立的√格, 所以 $x_1'x_2'$ 不是必要的质蕴含项, 可去掉。

3. 由于剩下 3 个必要的质蕴含项已经覆盖了函数的所有√方格, 所以此函数的最简表达式为

$$F = x_2x_3 + x_2'x_3' + x_1x_3$$

习题 7

1. 用代数化简法证明下列等式:

(1) $A + A'B + B' = 1$;

(2) $A + B(A' + CD)' = A$;

(3) $AB + A'C + B'C = AB + C$;

(4) $AB' + A'C' + B'C + B'(D + E) = A'C' + B'$ 。

2. 用代数法化简下列布尔函数:

(1) $A + A'B + BCD'$;

$$(2) AB+B'C'+A'+C;$$

$$(3) A'+B+(AB')' \cdot (C+D);$$

$$(4) BD+ABCD'+(A'+B+C')';$$

$$(5) AB'+(A+C) \cdot (D+(A+B)')+(C'+D')E;$$

$$(6) AB'+BC'+CA'+(A'B)';$$

课程总结报告参考题

1. 请将本课程中学习过的布尔代数、开关代数、命题代数按下列格式填表，然后对比它们之间的异同和相互关系。

	开关代数	命题代数	二元布尔代数	初等代数
论域				
基本运算				
运算规律				

在总结时，请着重考虑下列问题：

- (1) 论域中元素个数是否确定，如确定指明个数。
 - (2) 元素、基本运算是否有具体的意义？如有，它们在各自领域中代表什么？
 - (3) 基本运算和运算规律是根据运算所代表的意义得出的，还是被定义的？或有时是前者，有时是后者？
 - (4) 开关代数与命题代数是什么关系？布尔代数与开关代数和命题代数又是什么关系？（通俗地说，是“兄弟”关系还是“父子”关系）
2. 布尔代数与你学过的初等代数有那些相同与相异点？
3. 如果目前手头中只有“与门”和“非门”，但是电路中要用到“或门”，请问有没有办法用“与门”和“非门”来代替“或门”？
4. 请你为你自己家中设计一个报警装置，例如：当你外出锁门时，但忘记关闭煤气或空调，报警器会自动报警提醒，当然功能越强越好，根据你自己的需要。

附录

数学词汇中英文对照表

(按词汇所在页码先后排序)

中 文 名	英 文 名	页 码
莱布尼茨	Leibniz, G. W	前言
布尔	Boole, G	前言
申农	Shannon, C. E	前言
笛卡儿	R. Descartes	1
开关电路	switching circuit	2
命题	proposition	3
布尔代数	Boolean algebra	3
并联	parallel connection	4
串联	series connection	4
真值表	truth table	6
分配律	distributive law	7
布尔乘法	Boolean multiplication	7
布尔加法	Boolean addition	7
反相	negative phase	8
命题连接词	propositional connectives	9
命题逻辑	propositional logic	10
结合律	associative law	16
命题代数	propositional algebra	17
布尔函数	Boolean function	21
布尔运算	Boolean operation	21
布尔表达式	Boolean expression	21

最小项	minimal term	24
最大项	maximal term	24
标准积和范式	standard product sum normal form	24
标准和积范式	standard sum product normal form	24
亚里士多德	Aristotle	27
贝尔	Bell	27
非门	negation gate	36
或门	OR gate	37
与门	AND gate	37
卡诺	Karnaugh, M	47